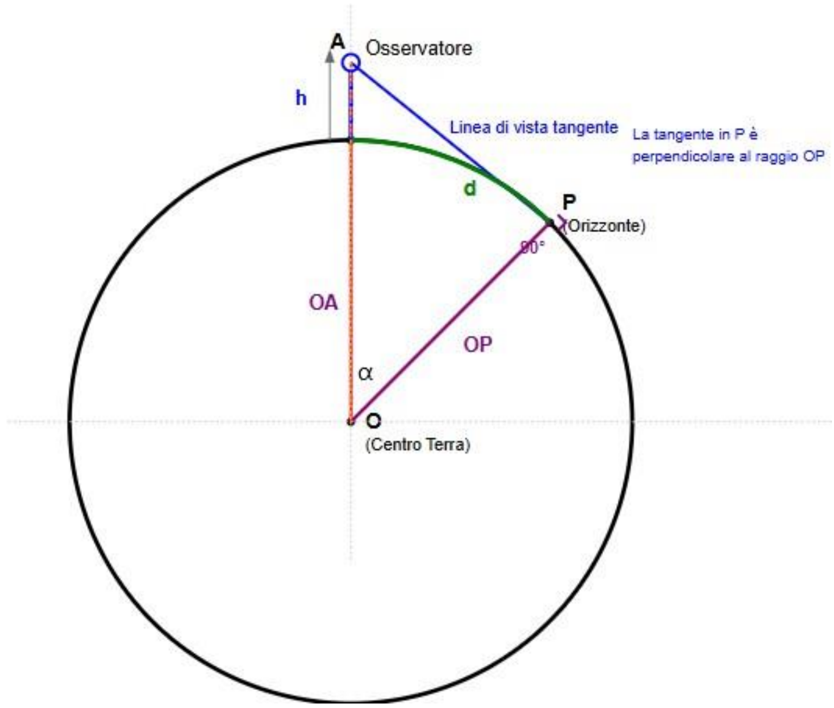
Calcolo dell'abbassamento della linea di visuale

a cura di Giancarlo Buccella

La sensazione comune che la Terra sia piatta è una percezione ingannevole dovuta alle nostre dimensioni molto piccole rispetto al pianeta. In realtà, la sua forma sferica ha un effetto tangibile e calcolabile su ciò che possiamo vedere: l'orizzonte non è infinito, (l'orizzonte geometrico è la linea creata dai punti in cui la tua linea di vista è tangente alla superficie terrestre), ma una linea che si abbassa progressivamente a causa della curvatura terrestre. Questo fenomeno, noto fin dall'antichità, può essere compreso e quantificato attraverso semplici principi geometrici.

Per calcolare di quanto la curvatura terrestre abbassi la nostra visuale, possiamo immaginare la Terra come una sfera perfetta. Il nostro punto di osservazione, la linea dell'orizzonte e il centro della Terra formano un triangolo rettangolo. La distanza dall'osservatore all'orizzonte (la luce viaggia in linea retta) e il raggio terrestre sono i due cateti, mentre l'ipotenusa è data dal raggio terrestre sommato all'altezza dell'osservatore.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAP, possiamo derivare una formula per calcolare la distanza dell'orizzonte.

$(OA)^2 = OP^2 + AP^2$

Essendo: $OA = R + h$, $OP = R$, $AP = R \text{ tg } \alpha$, si ha

$(R + h)^2 = R^2 + (R \text{ tg } \alpha)^2$

Per piccoli angoli è lecito approssimare (vedi sotto) la tangente con l'angolo $\text{tg } \alpha \approx \alpha$

$(R + h)^2 = R^2 + (R \alpha)^2$

Indicando con d la lunghezza dell'arco $R \alpha$

$$d^2 = (R+h)^2 - R^2 = R^2 + 2hR + h^2 - R^2 \simeq 2hR$$

$$\boxed{d = \sqrt{2hR + h^2}}$$

Questa è la formula esatta della distanza dell'orizzonte dall'osservatore alto h su superficie pianeggiante.

Quando $h << R$, ossia quando l'altezza è piccola rispetto al raggio terrestre (cioè quello che accade nei casi concreti) il termine h2 diventa trascurabile. Ad esempio con h = 100 m ed R = 6 371 000 m

$2hR = 1.2742 \cdot 10^9$

$h^2 = 10^4$

Il valore di h^2 è circa un milionesimo del termine 2hR, quindi completamente trascurabile. Allora tenendo presente questa approssimazione la relazione diventa

$$\boxed{d = \sqrt{2hR}}$$

Questa formula approssimata è la più comunemente usata per il calcolo della distanza dell'orizzonte vista da un'altezza h, ossia la lunghezza della linea che va dall'osservatore al punto di tangenza.

Collegato a questo parametro c'è il concetto di "abbassamento della linea di visuale", che è altezza (o l'angolo) con cui la linea di tangenza si "abbassa" rispetto alla orizzontale geometrica.

- **Abbassamento della linea di visuale (h)**: è l'altezza (o l'angolo) con cui la linea tangente alla Terra si "abbassa" rispetto all' orizzontale geometrica. In pratica: quanto alto dista la linea tangente al punto di osservazione, rispetto al suolo, nel punto in cui è posto l'osservatore (è il segmento h mostrato nella figura precedente).
- **Distanza dell'orizzonte (d)**: è la distanza lungo la superficie terrestre (o "a vista" in linea retta) tra l'osservatore e il punto più lontano che può vedere prima che la curvatura della Terra gli nasconda tutto. Dipende dall'altezza dell'osservatore rispetto al suolo.

Ovviamente l'abbassamento della linea di visuale h si ricava immediatamente dalla relazione precedente.

$$h = \frac{d^2}{2R}$$

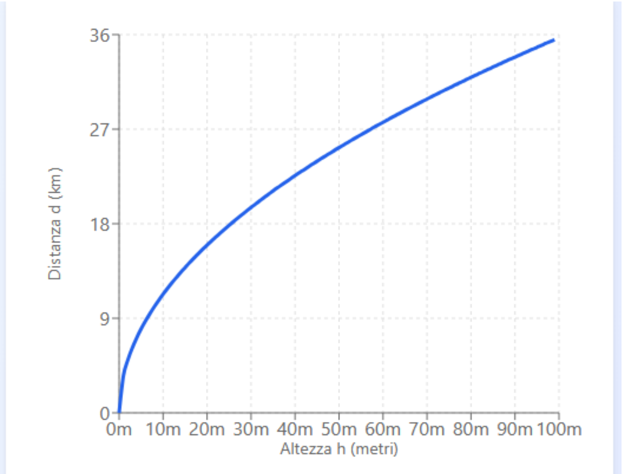
Ai fini dei calcoli possiamo usare più agevolmente le seguenti relazioni in cui il fattore 2R è esplicitato nel suo valore numerico.

Distanza dell'orizzonte: $d\,(km) = 112.88\sqrt{h\,(km)}$

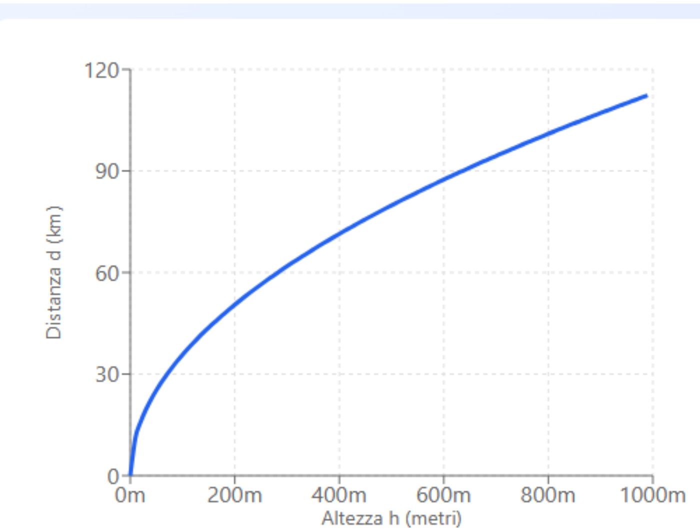
Abbassamento della linea di visuale: $h\,(km) = \dfrac{d^2\,(km)}{12742}$

Grafichiamo l’andamento della distanza dell’orizzonte, che per maggiore chiarezza abbiamo diviso in tre grafici.

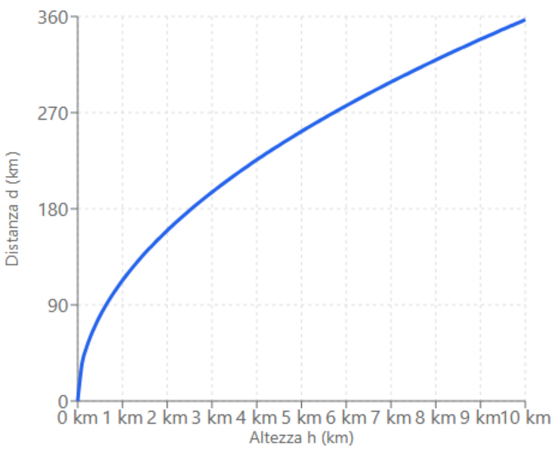
- h fino a 100 m



- h fino a 1 km



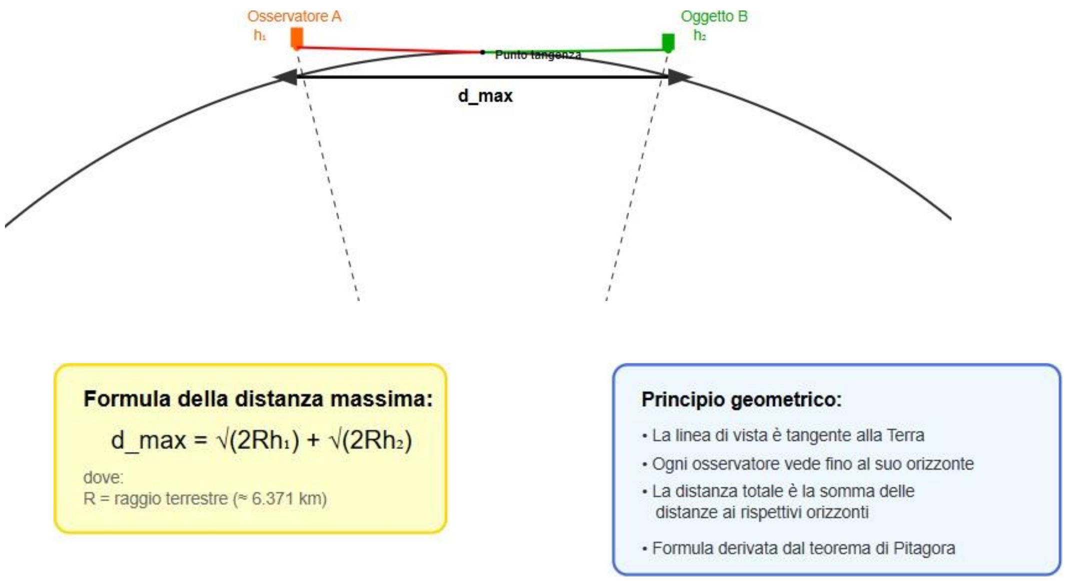
- h fino a 10 km



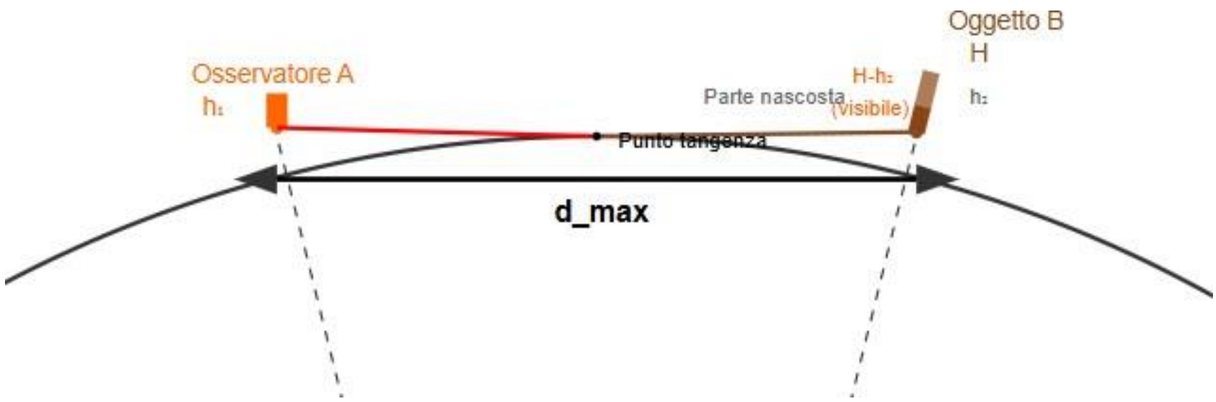
Ma attenzione, la distanza dell'orizzonte non è coincide con la distanza massima per vedere un oggetto, per quella serve considerare anche l'altezza dell'oggetto stesso. Infatti la distanza massima osservabile tra due oggetti è la somma dei due orizzonti,

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

come si vede dall'immagine seguente.



Se ora supponiamo che l'oggetto B sia più alto $H > h_2$ esso sarà visibile dall'osservatore A solo per la parte eccedente, ossia per $(H - h_2)$



Esempi

(Valore medio del raggio terrestre: R = 6371 km)

1. Una persona in riva al mare:

Immaginiamo una persona alta:

- 1,10 metri, quindi avente gli occhi a circa 1.00 m dal suolo (0,0010 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.001} = 3.56\,km$$

- 1,80 metri, quindi avente gli occhi a circa 1.70 m dal suolo (0,0017 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 4.65\,km$$

- 2.10 metri, quindi avente gli occhi a circa 2.00 m dal suolo (0,0020 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 5.01\,km$$

2. Se si sale su una casa alta 10 o 100 m oppure su una collina alta 1000 m, la distanza dell'orizzonte vale rispettivamente 11, 35 e 110 km.

3. Un aereo di linea vola a una quota di crociera di circa 10.000 metri (10 km). A questa altitudine, la visuale è ancora più ampia:

d ≈ [(2 · 6371 · 10)]1/2 ≈ √127420 km² ≈ 357 km

4. Due persone alte 1.80 m (occhi a 1.70 dal suolo) sono in piedi uno di fronte all'altra su una superficie piatta, a quale distanza massima riescono appena a vedersi?

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2} = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} + \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 4.65 + 4.65 = 9.3\,km$$

Ciò significa che se la seconda persona fosse alta 2.30 m posta a 9.3 km dalla prima, sarebbe visibile solo la sua parte superiore per 0.5 m.

5. Una persona in riva al mare sta guardando una barca a 10 km di distanza, chiediamoci ora quale sia l'abbassamento della visuale della barca.

Occorre calcolare h2 dalla formula $d_{max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$ (essendo: d_{max} = 10 km, h_1 = 1.70 m)

$$d_{max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

$$h_2 = \frac{(d_{max} - \sqrt{2Rh_1})^2}{2R} = \frac{(10 - 4.65)^2}{12742} = 2.2\,m$$

Quindi i primi 2.2 m della barca non saranno visibili a causa della curvatura terrestre (ovviamente neanche usando un binocolo!).

6. Se osserviamo un punto a 20 km di distanza, l'abbassamento sarà:

Usando la relazione precedente e facendo i calcoli si ha: h_2 = 18.2 m.

Se ci si sdraia a terra nel limite matematico di h = 0 si ha d = 0. Questo significa che teoricamente, se gli occhi fossero esattamente a livello della superficie terrestre (h = 0), non si potrebbe vedere alcun orizzonte, infatti la linea di tangenza in questo caso incontra la superficie esattamente nel punto in cui è l'osservatore, cioè la distanza fra l'osservatore e l'orizzonte è zero.

Possiamo ora chiederci: uno spostamento angolare di un grado di latitudine a quale lunghezza di arco terrestre corrisponda. Basta considerare che sussiste la seguente relazione

α° : 360° = d : 2πR cioè α° = 57.3° d/R

Se α vale 1° allora d = R/57,3° ossia 6371/57.4 = circa 110 km,

cioè allo spostamento di ogni grado di latitudine corrisponde sulla circonferenza uno spostamento di circa 110 km., a tale distanza, come visto nell'esempio 2, corrisponde un abbassamento della visuale di circa 1 km.

Quindi ogni 110 km che si percorre sulla superficie terrestre "la visuale" si abbassa di circa 1 km

N.B. È importante notare che questi calcoli si basano su un modello idealizzato della Terra come una sfera perfetta e non tengono conto di alcuni fattori:

la forma non perfettamente sferica della Terra: il nostro pianeta è in realtà un ellissoide di rotazione, leggermente schiacciato ai poli. Il raggio equatoriale è di circa 6.378 km e quello polare di circa 6.357 km. Questa differenza, sebbene minima, può influenzare calcoli di precisione.

la rifrazione atmosferica: la luce non viaggia in linea retta attraverso l'atmosfera, ma viene leggermente curvata. Questo fenomeno, chiamato rifrazione atmosferica, tende a "sollevare" gli oggetti all'orizzonte, facendoli apparire più alti di quanto non siano in realtà. Di conseguenza, l'orizzonte visibile è leggermente più lontano di quello geometrico.